

Leonardo Marin Munhoz Lataste

Estudo do erro de flutuação de heterogeneidade da alimentação de uma
usina de beneficiamento de minério de zinco

São Paulo

2018

Leonardo Marín Munhoz Lataste

**Estudo do erro de flutuação de heterogeneidade da alimentação
de uma usina de beneficiamento de minério de zinco**

**Trabalho de Formatura em Engenharia de
Minas do curso de graduação do
Departamento de Engenharia de Minas e de
Petróleo da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo.**

Orientadora: Professora Doutora Ana Carolina Chierigati

São Paulo

2018

Leonardo Marín Munhoz Lataste

TF-2018
L.341e

Sysw 2928375

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

H2018e



Escola Politécnica - EPMI



31700001552

Catálogo-na-publicação

Lataste, Leonardo

Estudo do erro de flutuação de heterogeneidade da alimentação de uma usina de beneficiamento de minério de zinco / L. Lataste -- São Paulo, 2018. 38 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo.

1.PROCESSAMENTO DE MINERAIS METÁLICOS 2.AMOSTRAGEM DE MINERAIS 3.ZINCO I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo II.t.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que tornaram esse trabalho possível, jamais teria conseguido chegar tão longe sem a ajuda de tantas pessoas queridas, que dividiram momentos felizes e outros nem tanto assim.

Gostaria de agradecer a meus pais, Daniel e Soraya, que me deram todo o suporte que poderia precisar, e um pouco mais, tanto financeiramente quanto, principalmente, emocionalmente.

Gostaria de agradecer aos professores do curso, que deram seu máximo, tentando passar conhecimento a um aluno não tão brilhante, e muitas vezes falhando nessa nobre missão.

Gostaria de agradecer aos amigos, companheiros de verdade, que passaram por todos os sofrimentos junto comigo. Aos amigos que desistiram no meio do caminho. Aos amigos que passaram a frente na corrida do amadurecimento. E principalmente aos amigos que continuam encarando os desafios ao meu lado até hoje.

Gostaria de agradecer aos engenheiros do empreendimento mineiro sobre o qual realizei este trabalho e que me receberam com tanta boa vontade, Thiago, Flávia, Anibal e Warley.

Mas principalmente, gostaria de agradecer à minha orientadora, a professora Ana Carolina Chierigati, sem a qual definitivamente não teria feito este trabalho, uma das pessoas mais legais que eu tive o prazer de conhecer nesta Universidade. Uma pessoa que teve a paciência para me ajudar, tarefa que não é das mais fáceis, desde de a escolha do tema do trabalho.

Um muito obrigado a todas essas pessoas maravilhosas.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi a determinação do erro de flutuação da heterogeneidade (HFE) do minério alimentado em uma usina de beneficiamento de minério de zinco. Para tal foi realizada a tomada de 40 amostras, provenientes de um amostrador de correia do tipo *cross belt*, situado sobre a correia que transporta o material da alimentação da moagem. Também foi realizada a análise das amostras tomadas e o cálculo do variograma obtido a partir destas amostras. Foi constatada correlação temporal no variograma calculado, o que, segundo Gy (1998), gera erros de 2 a 3 vezes menores do que o caso aleatório. Com um intervalo de confiança de 95%, foram calculados o erro de flutuação de heterogeneidade e o erro global de estimativa. Finalmente, foi realizada a comparação entre o erro gerado e a massa amostrada por dia, com o intuito de obter uma relação ótima entre os mesmos. O resultado encontrado foi a sugestão de que o tempo de tomada das amostras fosse de 20 em 20 minutos.

Palavras-chave: Amostragem. Efeito pepita. Erro de flutuação de heterogeneidade. Variograma. Zinco.

ABSTRACT

The aim of this work was the determination of the heterogeneity fluctuation error (HFE) of the ore fed in a zinc beneficiation plant. Based on this objective, 40 samples were taken from a cross belt sampler, located on the belt that feeds the mill. All samples were analyzed and the variogram obtained from these samples was calculated. A temporal correlation was observed in the calculated variogram, which, according to Gy (1998), generates errors of 2 to 3 times smaller than the random case. With a 95% confidence interval, the heterogeneity fluctuation error and the overall estimation error were calculated. Finally, the error generated and the mass sampled per day were compared in order to obtain an optimal relation. The main result was the suggestion of 20 minutes.

Key words: Sampling. Heterogeneity fluctuation error. Variogram. Zinc.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: ilustração dos conceitos de acurácia e precisão.....	15
Figura 2: representação dos componentes do erro global de estimativa.....	18
Figura 3: Exemplo de variograma com crescimento linear.....	20
Figura 4: Exemplo de variograma com crescimento irregular.....	21
Figura 5: Exemplo de variograma com comportamento cíclico.....	22
Figura 6: Representação de um amostrador tipo <i>cross belt</i>	26
Figura 7: Variograma Experimental.....	28
Figura 8: Demonstração do cálculo da integral, ponto a ponto.....	30
Figura 9: Comparação entre a função geradora de erros e o patamar do variograma.....	32
Figura 10: Comparação da massa amostrada por hora com o intervalo de confiança de 95%.....	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resultado das amostragens.....	21
Tabela 2: Número de incrementos relacionado ao número de pares possíveis, à função variograma e ao <i>lag</i>	27
Tabela 3: Resultados das funções auxiliares.....	31
Tabela 4: Resultados do cálculo do HFE.....	33
Tabela 5: Erro global de estimativa (OEE).....	34
Tabela 6: Correlação entre a massa amostrada por hora e o intervalo de confiança de 95% para o HFE.....	36

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1: Equação do erro fundamental da amostragem.....	17
Equação 2: Cálculo da função variograma.....	19
Equação 3: Cálculo da variância para amostras sem correlação temporal.....	27
Equação 4: Cálculo da integral simples do variograma.....	29
Equação 5: Cálculo da média da integral simples do variograma.....	30
Equação 6: Cálculo da integral dupla do variograma.....	30
Equação 7: Cálculo média da integral dupla do variograma.....	30
Equação 8: Função geradora de erros do variograma.....	30
Equação 9: Cálculo da variância a partir da função geradora de erros.....	32
Equação 10: Cálculo da variância do erro global de estimativa.....	33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FSE	Erro Fundamental de Amostragem
GSE	Erro de Segregação e Agrupamento
HFE	Erro de Flutuação de Heterogeneidade
IDE	Erro de Delimitação do Incremento
IEE	Erro de Extração do Incremento
IPE	Erro de Preparação do Incremento
IME	Erro de Materialização do Incremento
IWE	Erro de Ponderação do Incremento
OEE	Erro Global de Estimativa
QFE	Erro de Flutuação da Qualidade
TSE	Erro Total de Estimativa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVO	13
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3.1	Amostragem	14
3.1.1	Acurácia e precisão	14
3.1.2	Tipos de erro de amostragem	15
3.1.3	Erros de amostragem conforme suas fontes	16
3.2	O variograma	19
3.2.1	Cálculo do variograma	19
3.2.2	Tipos de variograma	20
4	Desenvolvimento	23
4.1	Tomada das amostras	23
4.1.1	O minério	25
4.1.2	Amostrador <i>cross belt</i>	25
4.2	Cálculo do variograma	26
4.3	Cálculo do erro de flutuação de heterogeneidade.	29
4.3.1	Cálculo das funções auxiliares	29

5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	35
6	CONCLUSÕES	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

Em todo empreendimento mineiro é de suma importância saber o que está sendo extraído da mina e o que está sendo vendido.

Extrair e tratar um material que não dará lucro, seja pelo fato do minério ter baixa concentração de minerais de interesse, ou concentração acima do limite de minerais deletérios, é um completo desperdício de recursos.

Da mesma forma é necessário ter conhecimento total da composição do material que está sendo entregue ao comprador, para que não seja entregue um minério com teor menor que o estipulado, quebrando um contrato, ou para evitar a entrega de minério com teor maior que o estipulado, deixando assim de lucrar com este material.

Sendo assim se faz necessária a boa análise do minério em todas as etapas da extração e tratamento do mesmo. citando (Chaves, 2012, p. 323) "Nenhum trabalho pode ser melhor que a amostra sobre a qual foi feito". Mostra-se, portanto, vital para o sucesso de qualquer empreendimento mineiro boas práticas de amostragem durante todas as etapas do processo.

2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é a determinação do erro de flutuação de heterogeneidade (HFE) com base na análise do variograma, visando otimizar o processo de amostragem de um amostrador tipo *cross belt*, instalado para a amostragem do minério que alimenta a moagem de uma usina de beneficiamento de zinco no Brasil.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Amostragem

Como afirmado anteriormente, para o sucesso de qualquer empreendimento mineiro se faz necessária uma boa amostragem. Mas antes de definir o que é uma boa amostragem, é necessário explicar o que é amostragem e os erros que podem ser cometidos durante seu processo.

A amostragem é o processo de tomar partes de um lote de forma que estas partes, as amostras, sejam representativas do todo, ou seja, tenham as mesmas características do lote de qual foram retiradas, dentro de um intervalo de acurácia e precisão preestabelecido (Chierregati e Pitard, 2012).

3.1.1 Acurácia e precisão

Acurácia e precisão são dois conceitos que costumam ser confundidos, mas são completamente diferentes e independentes um do outro.

A amostragem é acurada se a média do erro de amostragem tender a zero, em outras palavras, o processo é acurado se os valores absolutos dos erros de amostragem, positivos e negativos, forem compensados. Já uma amostragem é precisa quando o erro oscila relativamente pouco ao redor de sua média, não necessariamente zero (Chierregati e Pitard, 2012).

A figura 1 ilustra os conceitos de precisão e acurácia.

Figura 1- ilustração dos conceitos de acurácia e precisão.



Fonte: santiagoecintra.com.br, visitado dia 13/08/2018

3.1.2 Tipos de erro de amostragem

Os erros cometidos no processo de amostragem podem ser divididos em dois tipos, erros sistemáticos e erros aleatórios.

Os erros sistemáticos são aqueles que “empurram” a média dos erros para mais ou para menos, diminuindo sua acurácia. Um exemplo desse tipo de erro seria um amostrador cujo projeto faz com que retire prioritariamente a parte seca de um lote, deixando de amostrar a parte mais úmida, o que faria a amostra retirada sempre apontar uma umidade menor que a real.

Por sua vez, os erros aleatórios não têm efeitos sobre a acurácia da amostragem, mas sim sobre sua precisão. Esses erros aumentam a dispersão dos erros ao redor da média, isto é, aumentam sua variância.

3.1.3 Erros de amostragem conforme suas fontes

Os erros também podem ser classificados de acordo com suas fontes conforme o Quadro 1 a seguir.

Quadro 1- Tipos de erro de amostragem conforme suas fontes.

Nome do erro	antiga notação	nova notação
Erro global de estimativa	OE	OEE
Erro total de amostragem	TE	TSE
Erro fundamental de amostragem	FE	FSE
Erro de segregação e agrupamento	GE	GSE
Erro de flutuação de heterogeneidade	CE ou IE	HFE
Erro de flutuação de qualidade	QE	QFE
Erro de ponderação do incremento	WE	IWE
Erro de materialização do incremento	ME	IME
Erro de delimitação do incremento	DE	IDE
Erro de extração do incremento	EE	IEE
Erro de preparação do incremento	PE	IPE

Fonte: Chaves (2012)

O texto a seguir é baseado essencialmente nos livros de Gy (1992), Pitard (1993) e no capítulo de livro de Chiaregati e Pitard (2012).

Erro fundamental da amostragem (FSE) é o menor erro que um processo de amostragem pode gerar. Este erro só pode ser atingido se a amostragem for feita de forma que todas as partículas tenham exatamente a mesma probabilidade de serem escolhidas, e, além disto, as partículas forem escolhidas uma a uma aleatoriamente. É o erro que se dá simplesmente pelo fato de as partículas não serem exatamente iguais, isso é, o lote não ser homogêneo

A média do FSE é geralmente desprezível e sua variância pode ser estimada pela fórmula de Gy, a seguir.

$$s_{FSE}^2 = c f g l d^3 \left(\frac{1}{m_s} - \frac{1}{m_l} \right) \quad (1)$$

Onde s_{FSE}^2 é a variância do erro fundamental de amostragem relativa ao teor do lote, d é o tamanho máximo dos fragmentos, m_s é a massa da amostra, m_l é a massa do lote e c, f, l, g são fatores obtidos experimentalmente ou calculados.

O erro de segregação e agrupamento (GSE) é o erro gerado pelo fato de as partículas de um lote estarem sujeitas aos efeitos da gravidade e acabarem se segregando de acordo suas diferenças de características, como tamanho, formato e densidade. Além do citado anteriormente, esse erro também se dá pelo fato de as partículas não serem escolhidas uma a uma, mas sim serem tomadas como um grupo de partículas vizinhas, acentuando o erro causado pela segregação.

O erro de flutuação de heterogeneidade (HFE) se dá pela junção de outros dois tipos de erro, o erro de ponderação do incremento (IWE) e o erro de flutuação da qualidade (QFE), que se devem basicamente ao fato de a composição dos fluxos de material não ser sempre constante, sendo que o IWE é a parcela do erro gerada pela flutuação mássica do fluxo e QFE a parcela correspondente à flutuação nos teores transportados

O erro de materialização do incremento (IME) é o erro gerado por três outros erros, o erro de delimitação do incremento (IDE), o erro de extração do incremento (IEE) e o erro de preparação do incremento (IPE), que são resultado de erros ao escolher qual parte do lote tomar como incremento e ao retirar tal parte, bem como os erros cometidos no preparo do incremento, como britagem, peneiramento ou filtragem

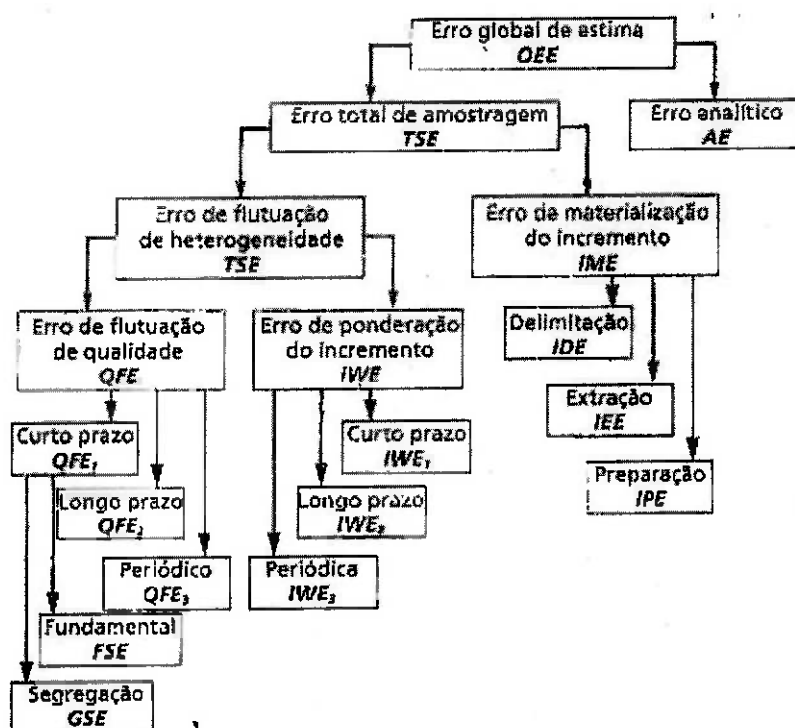
O erro total de amostragem (TSE) representa a soma de todos os erros cometidos durante o processo de amostragem, e é a soma dos erros HFE e IME. O erro fundamental de amostragem e o erro de segregação e agrupamento já estão contidos no HFE.

O erro analítico (AE) não é considerado um erro de amostragem, mas sim o erro proveniente da análise química do material.

Por fim o erro global de estimativa (OEE) é a soma do erro analítico (AE) com o erro total de amostragem (TSE).

A figura 2 ilustra como os erros se relacionam.

Figura 2 – representação dos componentes do erro global de estimativa



Fonte: Chierigati e Pitard (2012).

3.2 O variograma

Segundo Gy (1998, p. 99) “o variograma é uma poderosa ferramenta analítica para o propósito de otimizar o funcionamento do processo de produção, minimizando os custos de trabalho e adicionando valor ao produto”.

O variograma é uma função que permite relacionar a heterogeneidade unidimensional de um lote sendo transportado por um transportador de correia, resultando em uma correlação entre a heterogeneidade e o tempo, ou no caso da geoestatística, correlacionando a heterogeneidade com a distância entre pontos (Gy, 1998).

O variograma possibilita estimar o HFE, a partir do cálculo de funções auxiliares sobre cada ponto levantado. Além do HFE o variograma também permite a estimativa do efeito pepita do variograma pela extrapolação dos primeiros pontos, caso os mesmos apresentem comportamento regular.

3.2.1 Cálculo do variograma

Em uma situação em que a variação das massas dos incrementos tomados não ultrapassa 20%, pode-se assumir que o variograma dos teores é praticamente o mesmo que o variograma das heterogeneidades (Gy, 1998). Neste caso, o cálculo do variograma se dá por:

$$v(j) = \frac{1}{2n} \sum_q (t_{q+j} - t_q)^2 \quad (2)$$

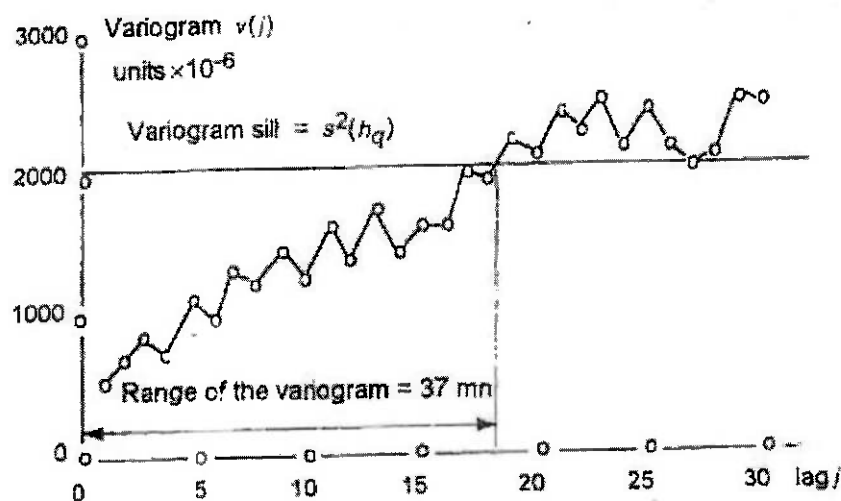
Onde j é o intervalo de tempo que separa dois incrementos (também chamado de *lag*), $v(j)$ é a função variograma para o intervalo j , t_q é o teor do incremento, t_{q+j} é o teor do incremento a uma distância j desse incremento e n é o número de pares possíveis para j (Chieragati, 2007).

O $lag\ j$ é um número adimensional dado pela razão entre um intervalo de tempo qualquer e o intervalo de tempo mínimo (Chieragati, 2007).

3.2.2 Tipos de variograma

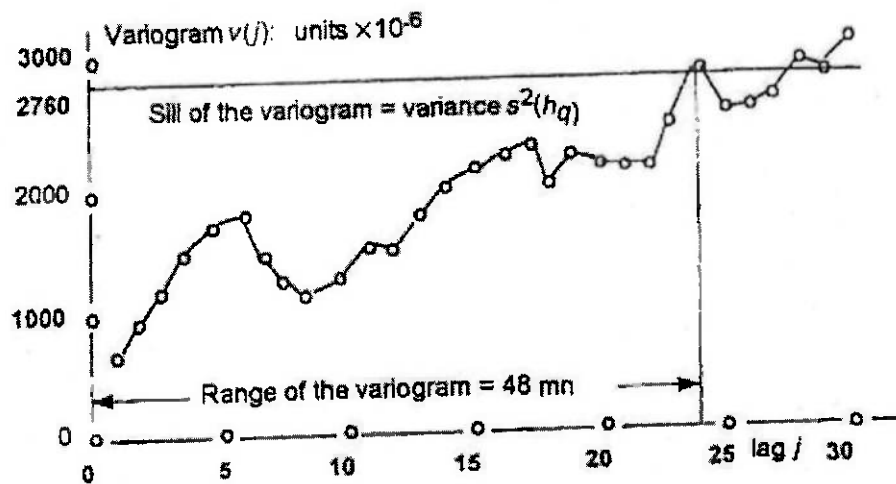
O variograma de uma usina de tratamento costuma apresentar um comportamento crescente até alcançar o patamar, a partir do qual seu comportamento passa a ser aleatório, semelhante ao esperado se os incrementos fossem tomados aleatoriamente, ao invés de correlacionados com o tempo, como ilustram as figuras 3 e 4.

Figura 3 – Exemplo de variograma com crescimento linear



Fonte: Gy (1998)

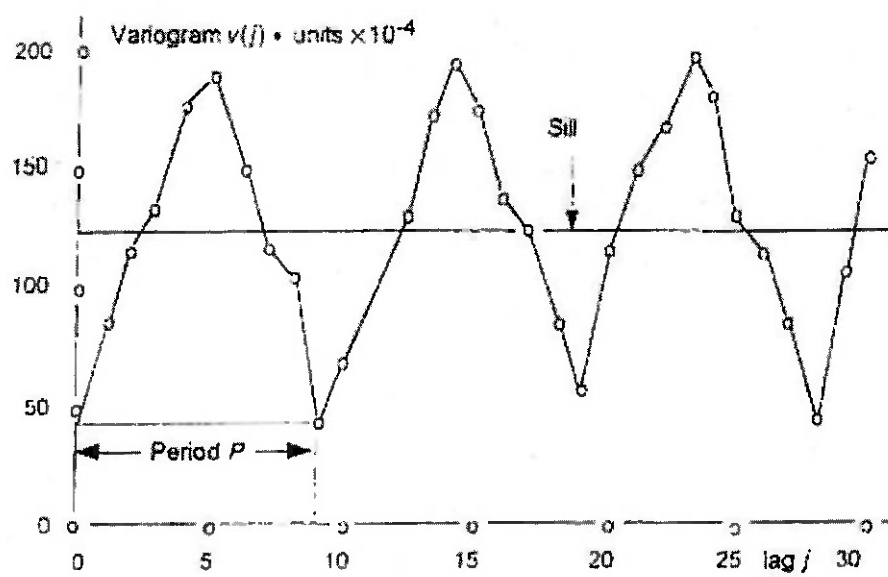
Figura 4 – Exemplo de variograma com crescimento irregular



Fonte: Gy (1998)

Eventualmente o variograma pode apresentar um comportamento cíclico, como ilustrado na figura 5. Esta situação requer cuidado, pois caso o amostrador tome os incrementos de forma regular, de forma que o passo escolhido para essa tomada coincida com um múltiplo do período do ciclo, o resultado obtido da análise dessa amostra estará enviesado.

Figura 5 – Exemplo de variograma com comportamento cíclico.



Fonte: Gy (1998)

4 Desenvolvimento

4.1 Tomada das amostras

Para o levantamento dos dados utilizados neste projeto, foi realizada uma visita à mina de zinco, situada no estado de Minas Gerais, cujo nome não será citado neste projeto por não ter sido autorizado pela empresa mineradora. A partir deste ponto, a empresa será chamada simplesmente de mineradora de zinco.

Foi realizada a tomada de 40 amostras, de cinco em cinco minutos, de um transportador de correia, transportando minério britado, por meio de um amostrador *cross belt*.

A tabela 1 apresenta o resultado da análise das amostras tomadas.

Tabela 1 – Resultado das amostragens.

#	AMOSTRA	HORA	MASSA (g)	TEOR Zn (%)
1	01			17,22
2	02	10:48	2580	19,42
3	03	11:11	3040	16,91
4	04	11:29	5590	21,01
5	06	12:00	7270	15,52
6	09	12:15	1320	22,14
7	10	12:20	1280	15,67
8	11	12:25	3390	20,64
9	12	12:30	5090	15,17
10	13	12:35	1730	16,86
11	16	12:50	6430	14,89
12	17	12:55	5430	19,32
13	18	13:00	3620	16,8
14	19	13:05	4140	16,32
15	20	13:10	1490	17,41
16	21	13:15	4960	16,7
17	22	13:20	3800	16,69
18	23	13:25	4360	15,71
19	24	13:30	8530	13,6
20	26	13:35	8840	14,81
21	27	13:40	4240	16,16
22	28	13:45	6130	17,85
23	29	13:50	3930	16,68
24	30	13:55	5820	14,5
25	31	14:00	6540	14,85
26	32	14:05	3270	15,87
27	32	14:05	4140	14,66
28	33	14:10	8830	15,09
29	34	14:20	4250	17,03
30	34	14:20	5000	15,09
31	35	14:25	4690	16,94
32	36	14:30	8160	14,74
33	38	14:40	4740	15,9
34	39	14:45	2940	15,40
35	40	14:50	4200	15,45
Média			4699	

Fonte: Mineradora de Zinco.

A divisão das amostras e sua análise química foram realizadas pela própria mineradora, o que resultou na perda de 5 das 40 amostras, restando apenas 35 amostras analisadas. Das 35 amostras restantes, as quatro primeiras amostras foram

tomadas em tempos irregulares. Este fato impossibilitou a utilização destas amostras para o cálculo do variograma.

4.1.1 O minério

O minério extraído pela mina em questão é composto por diversos minerais. Esses minerais são: Willemita (Zn_2SiO_4), calamina ($Zn_4Si_3O(OH)_2$), que são os dois minerais de interesse primário, hematita (Fe_2O_3), quartzo (SiO_2), siderita ($FeCO_3$), dolomita ($(Ca,Mg)(CO_3)_2$), clorita ($(Mg,Al,Fe)_{12}(Si,Al)_8O_{20}(OH)_{16}$), franklinita ($(Zn,Mn,Fe)_2O_4$), zincita (ZnO), esfarelita (ZnS) e galena (PbS) (Monteiro, 1997).

A usina de tratamento processa o minério com essa composição, produzindo concentrado primário de Zinco e concentrado secundário de Chumbo e Prata.

4.1.2 Amostrador *cross belt*

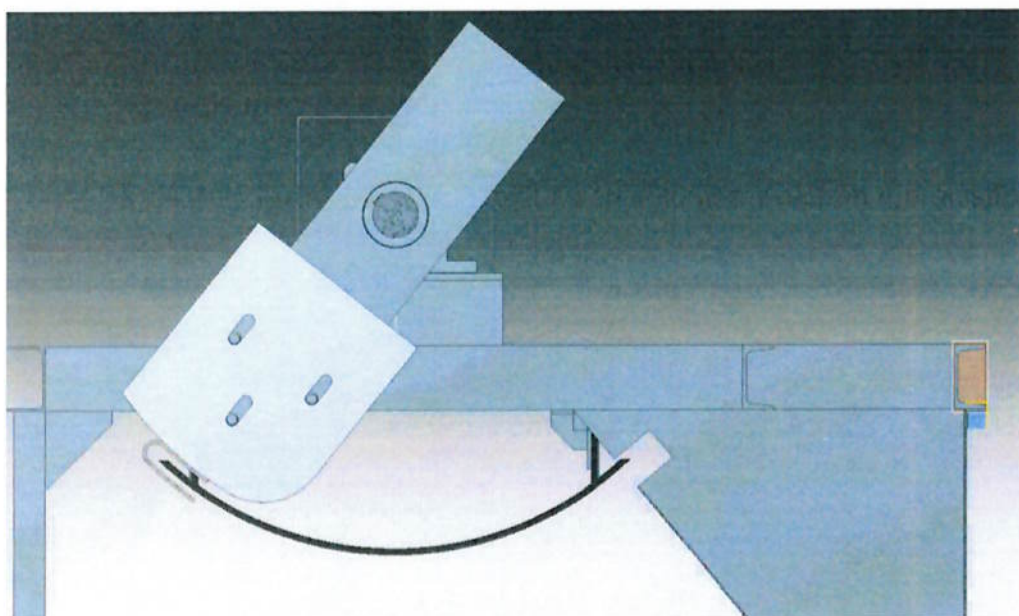
O amostrador *Cross Belt* é um tipo de amostrador de correia, basicamente composto por um braço que realiza um movimento pendular quando acionado por um *timer*, “varrendo” o minério da correia até uma canaleta que coleta o material

Em teoria esse amostrador é capaz de coletar todo o fluxo de forma periódica, o que, segundo Gy (1998), é a única forma correta e viável de se amostrar um fluxo unidimensional contínuo.

Entretanto o amostrador não é perfeito, muitas vezes acabando por não tomar o material fino, que fica preso na correia após a passagem do amostrador.

A figura 6 representa o esquema de um amostrador *cross belt*

Figura 6 – Representação de um amostrador tipo *cross belt*



Fonte: Hunan Sundy Science and Technology Co, Ltd

4.2 Cálculo do variograma

O cálculo do variograma é feito a partir da equação (2) anteriormente apresentada, que correlaciona a heterogeneidade com o tempo.

A tabela 2 relaciona o número de incrementos (Q), a função variograma ($v(j)$) e o número de pares possíveis (n) para cada *lag* (j).

Tabela 2 – Número de incrementos relacionado ao número de pares possíveis, à função variograma e o *lag*.

j	Q	n	v(j) (%)
1	29	28	2,95
2	27	26	1,59
3	27	26	3,22
4	26	25	2,09
5	25	24	2,69
6	25	24	1,28
7	25	24	2,99
8	23	22	1,78
9	22	21	1,95
10	22	21	2,36
11	21	20	2,84
12	20	19	3,24
13	19	18	3,41
14	18	17	3,32
15	17	16	4,42
16	16	15	3,29
17	15	14	2,81

Fonte: Autoria própria

Com a função variograma, $v(j)$, calculada para cada *lag*, o próximo passo é calcular o patamar do variograma. O patamar de um variograma é a variância de todas as amostras tomadas, sem considerar a relação cronológica entre cada uma delas.

A variância é calculada de acordo com a equação (3).

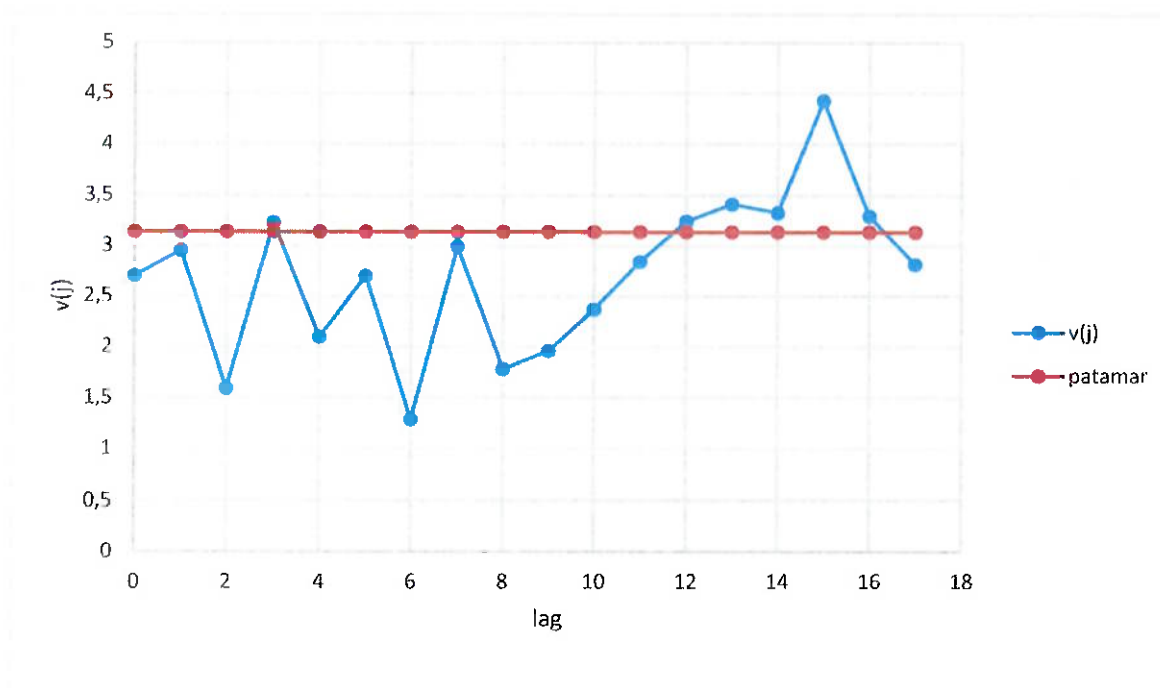
$$V = \frac{1}{n} \sum (t_i - t_m)^2 \quad (3)$$

Onde t_i é o teor de cada amostra, n é o número de amostras e t_m é o teor médio.

O teor médio das amostras é 16,27% de Zinco, dessa forma, a variância calculada com a equação (3), que é o patamar do variograma, é de 3,13%.

O variograma obtido é apresentado a seguir.

Figura 7 – Variograma Experimental



Fonte: Autoria própria

O valor da função variograma para um *lag* de 0, $v(0)$, foi encontrado pela regressão linear dos 4 primeiros pontos do variograma para o ponto zero. Este valor representa o efeito pepita, necessário para calcular o erro de flutuação de heterogeneidade e representa o restante dos erros que compõem o erro global de estimativa.

Analisando o variograma encontrado, observa-se que o mesmo apresenta crescimento irregular e suave.

A região antes do ponto de *lag* = 12, ponto no qual o variograma ultrapassa o patamar, é a região do variograma que apresenta correlação temporal. A partir do

ponto de $lag = 12$ (ou 60 minutos), o variograma passa a ter um comportamento aleatório, para o qual as funções auxiliares não podem mais ser utilizadas.

4.3 Cálculo do erro de flutuação de heterogeneidade.

O erro de flutuação da heterogeneidade (HFE) é calculado a partir de sua função geradora de erro, descrita por Gy (1998), a qual por sua vez é calculada com base nas funções auxiliares do variograma.

4.3.1 Cálculo das funções auxiliares

O primeiro passo no cálculo do HFE, após o variograma ter sido calculado, foi a estimativa do efeito pepita, que foi estimado em 2,70%.

O segundo passo foi o cálculo das 5 funções auxiliares do variograma:

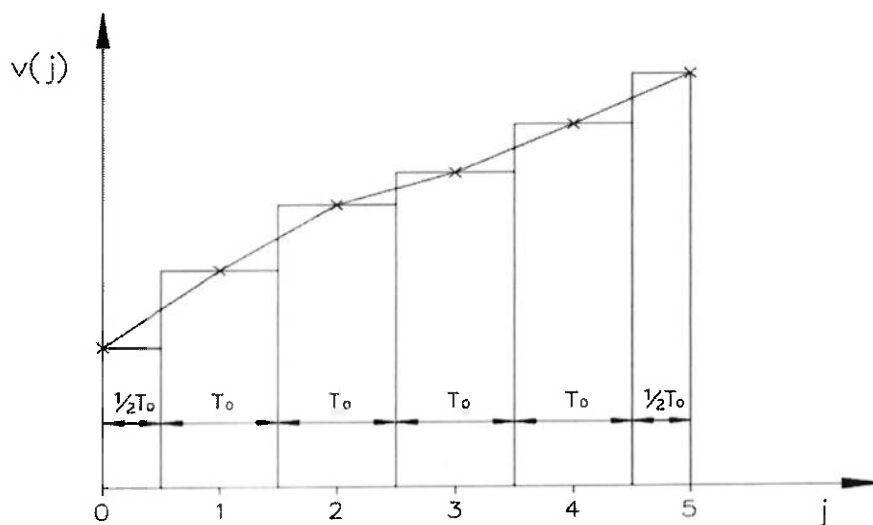
1. A integral simples do variograma, calculada ponto a ponto pela equação 4.

$$S(j) = \frac{1}{2}v(j-1) + \frac{1}{2}v(j) + S(j-1) \quad (4)$$

Onde $S(0) = 0$.

A integral pode ser calculada ponto a ponto como um retângulo com o lag mínimo = 5 minutos de base, e altura igual a $v(j)$, como ilustrado na figura 7.

Figura 8 – Demonstração do cálculo da integral, ponto a ponto.



Fonte: Chierigati (2007)

2. A média da integral simples do variograma, calculada pela equação 5.

$$w(j) = S(j)/j \quad (5)$$

3. A integral dupla do variograma, calculada pela equação 6.

$$S'(j) = S'(j-1) + \frac{1}{2}S(j-1) + \frac{1}{2}S(j) \quad (6)$$

Onde $S'(0) = 0$

4. A média da integral dupla do variograma, calculada pela equação 7.

$$w'(j) = 2S'(j)/j^2 \quad (7)$$

5. A função geradora de erros do variograma com amostragem sistemática, calculada pela equação 8.

$$W(j) = 2w\left(\frac{j}{2}\right) - w'(j) \quad (8)$$

Onde, caso o número não seja inteiro, o valor de $w\left(\frac{j}{2}\right)$ será a interpolação dos dois inteiros mais próximos.

A tabela 3 relaciona todas essas funções com o *lag* e a função variograma, onde j é o *lag*, $v(j)$ é a função variograma, $S(j)$ é a integral simples do variograma, $w(j)$ é a média da integral simples do variograma, $S'(j)$ é a integral dupla do variograma, $w'(j)$ é a média da integral dupla do variograma e $W(j)$ é a função geradora de erros.

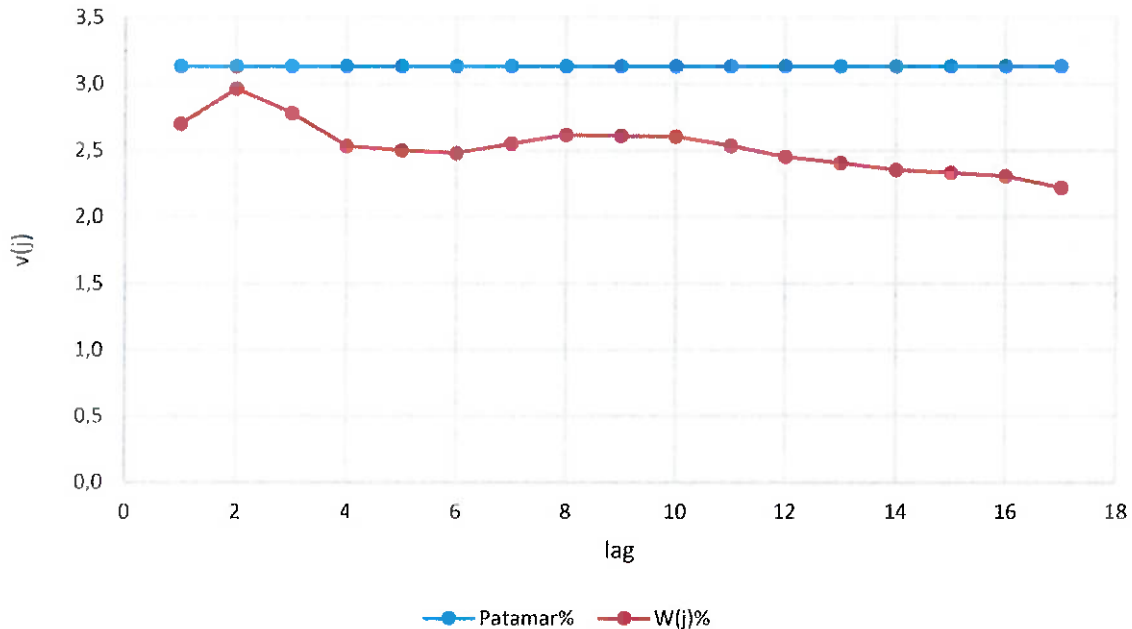
tabela 3 – Resultados das funções auxiliares

j	$v(j)$	$S(j)$	$w(j)$	$S'(j)$	$w'(j)$	$2w(j/2)$	$W(j)$
1	2,95	2,82	2,82	1,41	2,82	5,52	2,70
2	1,59	5,09	2,54	5,37	2,68	5,64	2,96
3	3,22	7,49	2,50	11,66	2,59	5,37	2,78
4	2,09	10,15	2,54	20,48	2,56	5,09	2,53
5	2,69	12,54	2,51	31,82	2,55	5,04	2,50
6	1,28	14,53	2,42	45,36	2,52	5,00	2,48
7	2,99	16,66	2,38	60,95	2,49	5,03	2,55
8	1,78	19,04	2,38	78,80	2,46	5,07	2,61
9	1,95	20,90	2,32	98,77	2,44	5,05	2,61
10	2,36	23,06	2,31	120,75	2,42	5,02	2,60
11	2,84	25,66	2,33	145,11	2,40	4,93	2,53
12	3,24	28,70	2,39	172,29	2,39	4,84	2,45

Fonte: Autoria própria

A figura 9 mostra o comportamento da função geradora de erros $W(j)$ comparada ao patamar.

Figura 9 – Comparação entre a função geradora de erros e o patamar do variograma.



Fonte: autoria própria

A variância do erro de flutuação de heterogeneidade pode ser calculada com base na função geradora de erros $W(j)$, utilizando a equação 9:

$$s^2(HFE) = \frac{W(j)}{Q} \quad (9)$$

Onde $s^2(HFE)$ é a variância do erro de flutuação de heterogeneidade, Q é o número de incrementos tomados e $W(j)$ é o valor da função geradora de erros.

Assumindo que os erros apresentam distribuição normal, pode-se calcular o intervalo de confiança de 95% como sendo $\pm 2 s(HFE)$ ao redor da média.

A tabela 4 apresenta os resultados para o intervalo de confiança de 95% em valores absolutos e em valores relativos ao teor médio. Esta tabela correlaciona o lag (j), o número de incrementos tomados (Q), a função geradora de erros ($W(j)$), a variância do erro de flutuação de heterogeneidade ($s(HFE)$), o intervalo de confiança

para 95% em valores absolutos (IC (abs)) e o intervalo de confiança para 95% em valores relativos a média (IC (rel)).

Tabela 4- Resultados do cálculo do HFE.

j	Q	W(j)	$s(HFE)$	IC (abs) (%)	IC (rel) (%)
1	29	2,70	0,30	0,61	3,75
2	27	2,96	0,33	0,66	4,07
3	27	2,78	0,32	0,64	3,94
4	26	2,53	0,31	0,62	3,83
5	25	2,50	0,32	0,63	3,88
6	25	2,48	0,31	0,63	3,87
7	25	2,55	0,32	0,64	3,92
8	23	2,61	0,34	0,67	4,14
9	22	2,61	0,34	0,69	4,23
10	22	2,60	0,34	0,69	4,23
11	21	2,53	0,35	0,69	4,27
12	20	2,45	0,35	0,70	4,30

Fonte: Autoria própria

Analisando a tabela 4 se observa que, conforme o *lag* aumenta, isto é, o tempo entre a tomada das amostras aumenta, o erro relativo à flutuação de heterogeneidade aumenta. O contrário pode ser dito sobre a quantidade de incrementos tomados, quanto maior essa quantidade, menor o erro gerado. Os pontos de valores $j=10$, $j=11$ e $j=12$ ilustram essa observação.

O erro global de estimativa (OEE) pode ser estimado a partir do HFE e do efeito pepita. Como o efeito pepita representa a soma de todos os erros que não compõem o HFE, basta somar o efeito pepita ao HFE para se obter o OEE, conforma a equação 10.

$$s^2(OEE) = s^2(HFE) + v(0) \quad (10)$$

A partir da variância do OEE calculada utilizando a equação 10, pode-se encontrar seu desvio padrão e, considerando que ocorre distribuição normal para o erro, o intervalo de confiança de 95% para o OEE pode ser calculado.

A tabela 5 relaciona o *lag* (j) com a variância do HFE ($s^2(HFE)$), o efeito pepita ($v(0)$), a variância do OEE, o desvio padrão do OEE e os intervalos de confiança de 95% absoluto (IC(abs)) e relativo (IC(rel)).

Tabela 5 – Erro global de estimativa (OEE).

j	$s^2(HFE)$	$v(0)$	$s^2(OEE)$	$s(OEE)$	IC (abs)	IC (rel)
1	0,09	2,70	2,79	1,67	3,34	20,54
2	0,11	2,70	2,81	1,68	3,35	20,60
3	0,10	2,70	2,80	1,67	3,35	20,58
4	0,10	2,70	2,80	1,67	3,35	20,56
5	0,10	2,70	2,80	1,67	3,35	20,57
6	0,10	2,70	2,80	1,67	3,35	20,56
7	0,10	2,70	2,80	1,67	3,35	20,57
8	0,11	2,70	2,81	1,68	3,35	20,62
9	0,12	2,70	2,82	1,68	3,36	20,63
10	0,12	2,70	2,82	1,68	3,36	20,63
11	0,12	2,70	2,82	1,68	3,36	20,64
12	0,12	2,70	2,82	1,68	3,36	20,65

Fonte: Autoria própria

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como pode ser observado na tabela 4, quanto menor o intervalo entre a tomada das amostras, menor tende a ser o erro gerado, mas ao mesmo tempo que o erro diminui com intervalos menores entre os incrementos, a massa coletada aumenta. Da mesma forma que é inviável se trabalhar com um erro muito grande, não é praticável ter que processar massas exorbitantes de amostra. Portanto se faz necessário encontrar um equilíbrio entre a massa amostrada e o erro gerado.

Utilizando a função geradora de erros ($W(j)$), ilustrada no gráfico da figura 9, foi calculada a relação entre o intervalo de confiança de 95% do HFE, com a massa amostrada por hora. Para isto foi considerado um intervalo de tempo de 2 horas. Neste intervalo a equação 9 foi utilizada para calcular a variância do HFE e em seguida seu desvio padrão. Considerando que o erro apresenta distribuição normal o intervalo de confiança de 95% foi calculado como $\pm 2s$ (HFE).

A tabela 6 relaciona o intervalo entre a tomada de cada incremento (t), o número de incrementos tomados (Q), a massa amostrada por hora (\dot{m}), a função geradora de erros ($W(j)$), a variância calculada do HFE ($s^2(\text{HFE})$) e o intervalo de confiança de 95% em valor absoluto (IC (abs)), para um intervalo de tempo de 2 horas.

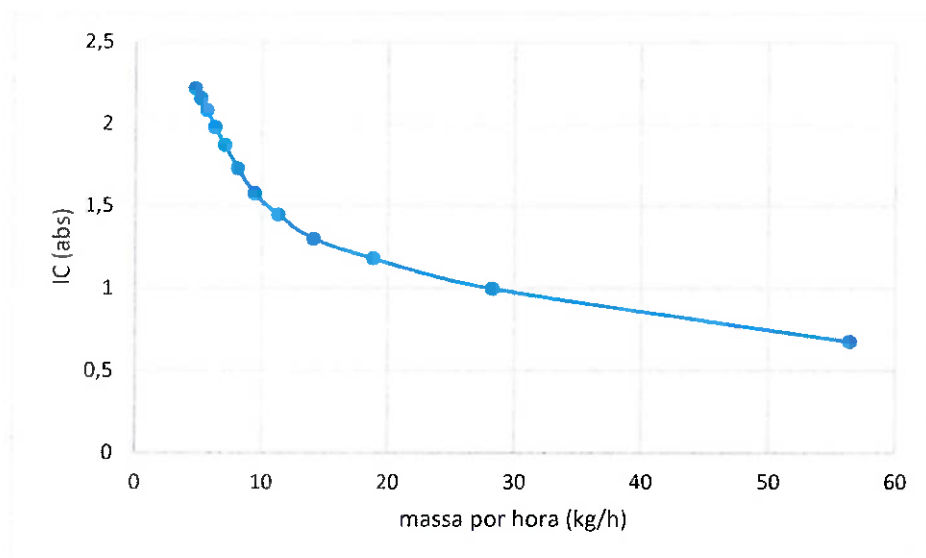
Tabela 6 – Correlação entre a massa amostrada por hora e o intervalo de confiança de 95% para o HFE.

t (min)	Q	\dot{m} (kg)	W(j)	s^2 (HFE)	S(HFE)	IC (abs) (%)
5	24,00	56,40	2,70	0,11	0,34	0,67
10	12,00	28,20	2,96	0,25	0,50	0,99
15	8,00	18,80	2,78	0,35	0,59	1,18
20	6,00	14,10	2,53	0,42	0,65	1,30
25	4,80	11,28	2,50	0,52	0,72	1,44
30	4,00	9,40	2,48	0,62	0,79	1,57
35	3,43	8,06	2,55	0,74	0,86	1,72
40	3,00	7,05	2,61	0,87	0,93	1,87
45	2,67	6,27	2,61	0,98	0,99	1,98
50	2,40	5,64	2,60	1,08	1,04	2,08
55	2,18	5,13	2,53	1,16	1,08	2,15
60	2,00	4,70	2,45	1,22	1,11	2,21

Fonte: autoria própria

O gráfico da figura 10 foi construído com base na tabela 5. Este gráfico relaciona a massa amostrada por hora com o intervalo de confiança de 95% para o HFE.

Figura 10 – Comparação da massa amostrada por hora com o intervalo de confiança de 95%.



Fonte: Autoria própria

6 CONCLUSÕES

A parte inicial do gráfico da figura 10 mostra uma tendência de diminuição acentuada do erro, enquanto se observa uma diminuição suave deste erro na parte final. Considerando esse mesmo gráfico e o variograma apresentado na figura 7, sugere-se que, caso o erro esteja dentro do limite aceitável, as amostras sejam tomadas pelo amostrador *cross belt* de 20 em 20 minutos, o que representa um $lag = 4$, tendo uma massa amostrada por hora de aproximadamente 14,10 kg, o que representa uma massa diária de 338,4 kg.

Esta sugestão se faz pelo fato de o ponto de $lag = 4$ ser o ponto de transição, na figura 10, entre uma queda brusca do erro, conforme o aumento da massa, para uma queda muito mais suave. Observa-se que, para conseguir a mesma diminuição do erro obtida até este ponto, seria necessário um aumento da massa amostrada de aproximadamente 5 vezes a quantidade necessária até então.

Conclui-se, portanto, que o cálculo do erro de flutuação de heterogeneidade (HFE) e a análise do variograma são ferramentas essenciais para a otimização de processos de amostragem e permitiram a otimização do intervalo de corte do amostrador tipo *cross belt* instalado na alimentação da moagem de uma usina de beneficiamento de zinco no Brasil. Visando melhorar a continuidade dos pontos iniciais do variograma, sugere-se repetir o procedimento de modo a se obterem de 40 a 60 amostras regularmente separadas de cinco minutos entre si.

REFERÊNCIAS

CHIEREGATI, A. C.; PITARD, F. F. Fundamentos teóricos da amostragem. In: CHAVES, A. P. **Teoria e Prática do Tratamento de Minérios. Vol 5. Manuseio de Sólidos Granulados**. 2nd ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2012.

CHIEREGATI, A. C. **Reconciliação pró-ativa em empreendimentos mineiros**. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Minas e de Petróleo, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2007.

GY, P. **Sampling of heterogeneous and dynamic material systems theories of heterogeneity, sampling, and homogenizing**. Amsterdam: Elsevier, 1992.

GY, P. **Sampling for analytical purposes**. 1st ed., translated by A.G. Royle, John Wiley & Sons, West Sussex, England. 1998.

GY, P. **Sampling of discrete materials 3. Quantitative approach – sampling one dimensional objects**. Chemometrics and intelligent laboratory systems. vol 74. 2004.

MONTEIRO, L.V.S. **Contribuição da gênese das mineralizações de zinco na mina de Vazante, MG**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo. 1997.

PEREIRA, L.A.C. **Reconciliação proativa em uma mina de Zinco**, Tese de Conclusão de Curso, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Minas, Universidade de São Paulo. 2017.

PITARD, F. F. **Pierre Gy's sampling theory and sampling practice: heterogeneity, sampling correctness, and statistical process control**. 2nd ed. Florida: CRC Press, 1993.